

Mengembangkan Kualitas Pemahaman dalam Aljabar Abstrak melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS

(Eksperimen pada Mahasiswa Matematika UNAND dan Pendidikan Matematika UNP)

I Made Arnawa¹⁾

Abstrak: Pemahaman merupakan tujuan utama yang ingin dicapai dalam setiap pembelajaran matematika. Kualitas pemahaman seseorang tentang suatu konsep menggambarkan kualitas skema yang dimiliki oleh orang tersebut. Keberhasilan seseorang dalam menyelesaikan persoalan-persoalan matematika sangat ditentukan oleh kualitas skema yang dimilikinya. Teori APOS yang merupakan suatu pendekatan pembelajaran matematika yang khusus untuk perguruan tinggi, mempostulatkan bahwa tingkat-tingkat pemahaman seseorang tentang suatu konsep matematika dapat dikategorikan ke dalam empat tingkatan, yaitu: aksi, proses, objek, dan skema. Penelitian yang dilakukan di Jurusan Matematika UNAND dan Jurusan Pendidikan Matematika UNP bertujuan untuk memperoleh gambaran tentang kontribusi teori APOS dalam mengembangkan kualitas pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai tingkat pemahaman lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa.

Kata kunci: tingkat pemahaman, teori APOS, analisis teoritik, strategi pembelajaran, dan aljabar abstrak

1. Pendahuluan

Aljabar abstrak merupakan generalisasi dari aljabar (sistem matema-

tika) yang diajarkan pada tingkat persekolahan. Aljabar abstrak dibangun dari beberapa aksioma yang

¹⁾ Dr. I Made Arnawa, M.Si. adalah tenaga pengajar pada Jurusan Matematika Universitas Andalas

memungkinkan kita memandang berbagai sistem matematika pada tingkat persekolahan sebagai suatu hal yang khusus dari suatu sistem matematika yang lebih abstrak.

Matakuliah aljabar abstrak merupakan salah satu matakuliah dalam kurikulum program studi matematika dan pendidikan matematika di semua Perguruan Tinggi di Indonesia. Melalui perkuliahan aljabar abstrak, mahasiswa dapat menyoroti hal-hal yang umum dari berbagai sistem matematika yang sudah mereka kenal sebelumnya, dan mahasiswa mempunyai kesempatan untuk memperoleh pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep-konsep seperti identitas dan invers. Apakah yang serupa, misalnya antara identitas untuk perkalian bilangan real, identitas untuk perkalian matriks, dan identitas untuk komposisi fungsi? Adakah konsep yang umum dibalik invers fungsi, invers matriks, dan invers perkalian suatu bilangan? Dalam aljabar abstrak, mahasiswa juga dapat belajar tentang: (1) pentingnya bahasa yang teliti dalam matematika dan (2) peran definisi dalam mendukung bahasa yang teliti.

Berdasarkan pengalaman sebagai mahasiswa S1 dan S2 di ITB dan pengalaman sebagai dosen matakuliah aljabar abstrak di jurusan

Matematika FMIPA UNAND Padang, aljabar abstrak merupakan matakuliah yang sulit untuk dipelajari dan juga sulit untuk diajarkan. Dari sisi mahasiswa, kesulitan ini misalnya disebabkan oleh: (1) konsep-konsep dalam aljabar abstrak sangat abstrak bagi mahasiswa, (2) banyak contoh-contoh yang berkenaan dengan konsep, tidak dikenali dengan baik oleh mahasiswa, (3) banyak mahasiswa yang belum terbiasa dengan pembuktian deduktif. Hal seperti ini ternyata tidak hanya terjadi di Indonesia, tetapi juga di negara-negara maju seperti yang dinyatakan oleh Leron dan Dubinsky (1994) dan Lajoie (dalam Carlson, 2003). Semua ini berujung pada rendahnya kualitas pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak (Dubinsky et al., 1994; Hazzan & Leron dalam Findel, 2001).

Setiap mahasiswa mempunyai kemampuan yang berbeda dalam memahami matematika/aljabar abstrak, dari sekelompok mahasiswa yang tidak dipilih secara khusus, akan selalu kita jumpai mahasiswa yang kemampuannya tinggi, sedang, dan rendah, karena kemampuan mahasiswa (termasuk kemampuan dalam matematika) menyebar secara distribusi normal (Galton dalam Ruseffendi, 1991). Perbedaan kemampuan yang dimiliki mahasiswa

tidak semata-mata merupakan bawaan dari lahir, tetapi juga bisa karena pengaruh lingkungan (Ruseffendi, 1991). Dengan demikian, pemilihan lingkungan pembelajaran (pendekatan pembelajaran) harus diarahkan agar dapat mengakomodasi kemampuan mahasiswa yang pada umumnya adalah heterogen. Ada kemungkinan mahasiswa yang kemampuannya sedang atau rendah, namun apabila pendekatan pembelajaran yang digunakan "cocok" dengan mereka, maka pemahaman mereka akan menjadi lebih baik.

Menurut Allen (dalam Mustafa, 2001), banyak penelitian membuktikan bahwa mahasiswa yang memiliki kemampuan tinggi akan memperoleh prestasi yang tinggi (Krutetskii, 1976), tidak peduli metode belajar apapun yang diterapkan. Tetapi mahasiswa yang berkemampuan sedang atau rendah akan mendapatkan manfaat dari penerapan strategi-startegi pembelajaran seperti: (1) respon dan partisipasi aktif dan (2) umpan balik yang bersifat korektif.

Masalah penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut: (1) apakah terdapat pengaruh teori APOS terhadap tingkat pemahaman aljabar abstrak mahasiswa?, (2) apakah terdapat pengaruh latar belakang pendidikan (kependidikan dan non

kependidikan) terhadap tingkat pemahaman aljabar abstrak mahasiswa?, dan (3) Apakah terdapat pengaruh kemampuan awal terhadap tingkat pemahaman aljabar abstrak mahasiswa?

Berdasarkan permasalahan penelitian tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah: (1) untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan teori APOS dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa, (2) untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak antara mahasiswa matematika (Nondik) dengan mahasiswa pendidikan matematika (Dik), dan (3) untuk memperoleh deskripsi yang lengkap tentang perbedaan tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak antara mahasiswa kemampuan awal tinggi, sedang, dan rendah.

2. Kajian Literatur

2.1 Karakteristik Pembelajaran berdasarkan Teori APOS

Ada beberapa hal yang dapat dipandang sebagai karakteristik pembelajaran berdasarkan teori

APOS, yaitu pembelajarannya meliputi/mengikutsertakan: (1) pengetahuan dikonstruksi mahasiswa melalui tahapan konstruksi mental *aksi, proses, objek, dan skema* (APOS), (2) menggunakan komputer, (3) mahasiswa belajar dalam kelompok kecil, (4) menggunakan siklus *ACE* (*activity, class discussion, exercise*). Deskripsi lengkap untuk masing-masing karakteristik tersebut dapat dilihat pada Arnawa (2005).

2.2 Analisis Teoritik dan Strategi Pembelajaran Aljabar Abstrak

Menurut Asiala et al. (1997a) dan Dubinsky & McDonald (2001), maksud dari analisis teoritik (*theoretical analysis*) untuk suatu konsep matematika adalah untuk memberikan model kognisi, yaitu deskripsi tentang apa yang dimaksud dengan memahami suatu konsep matematika, yang dikaitkan dengan konstruksi-konstruksi mental APOS, yang mahasiswa bangun dalam usahanya untuk memahami konsep matematika. Analisis teoritik suatu konsep dibuat berdasarkan pemahaman seseorang tentang suatu konsep dan berdasarkan pengalaman seseorang itu sebagai orang yang pernah belajar dan mengajar konsep tersebut. Hasil dari analisis teoritik untuk suatu konsep disebut

dekomposisi genetik (*genetic decomposition*). Perlu diingat bahwa dekomposisi genetik suatu konsep tidaklah tunggal.

Disain/strategi dan implementasi pembelajaran untuk suatu konsep matematika dibuat berdasarkan analisis teoritik yang sudah dipilih. Dalam perspektif teori belajar, teori APOS mempengaruhi pembelajaran dengan dua cara. Pertama, analisis teoritik mempostulatkan konstruksi mental tertentu yang dapat dibantu konstruksinya melalui pembelajaran. Kedua, desain/strategi pembelajaran tergantung kepada topik matematika tertentu.

Berikut ini diberikan analisis teoritik untuk beberapa konsep beserta disain/strategi pembelajarannya yang disarikan dari beberapa sumber, yaitu Asiala et al. (1997b), Brown et al. (1997), dan Dubinsky et al. (1994).

2.2.1 Analisis Teoritik Konsep Group

1) **Pengetahuan Prasyarat**
Group adalah suatu himpunan beserta operasi biner yang didefinisikan pada himpunan tersebut yang memenuhi beberapa aksioma yang disebut dengan aksioma group. Pemahaman mahasiswa terhadap himpunan, operasi biner, dan aksioma

sangat diperlukan agar dapat memahami konsep group secara baik. Dengan demikian, konsep tentang himpunan, operasi biner, dan aksioma perlu diulas kembali secara ringkas sebelum menyampaikan konsep group.

2) Dekomposisi Genetik Konsep Group

Konsep group dapat dipandang sebagai *skema* yang terdiri dari tiga *skema*, yaitu *skema* himpunan, *skema* operasi biner, dan *skema* aksioma. Dalam hal ini *skema* himpunan dan *skema* operasi biner telah ditematisasi menjadi *objek* dan kedua *objek* ini kemudian dikoordinasikan melalui *skema* aksioma. *Skema* aksioma yang dimaksudkan disini juga meliputi gagasan bahwa operasi biner yang didefinisikan pada suatu himpunan bisa saja memenuhi sifat-sifat group atau tidak, ini dilakukan dengan memeriksa berlaku tidaknya aksioma-aksioma group pada himpunan dan operasi biner yang diberikan. Dalam pemeriksaan keberlakuan aksioma-aksioma group, *objek* konsep aksioma di-deencapsulasi menjadi *proses* dan kemudian menggunakannya pada operasi biner dan himpunan tertentu. Dalam hal ini, operasi biner dan himpunan juga di-deencapsulasi menjadi *proses*.

Selanjutnya ketiga proses ini (aksioma, operasi biner, dan himpunan) dikoordinasikan untuk menentukan apakah aksioma dipenuhi atau tidak.

Skema group dapat ditematisasi menjadi *objek*. Beberapa tindakan yang dapat dilakukan terhadap *objek* konsep group, misalnya: memeriksa bahwa suatu himpunan terhadap suatu operasi biner tertentu membentuk group, memeriksa beberapa sifat yang dimiliki oleh group, dan memeriksa apakah dua buah group yang diberikan isomorfik atau tidak.

3) Strategi Pembelajaran Konsep Group

Strategi pembelajaran untuk konsep group dirancang agar mahasiswa dapat mengkonstruksi semua hal yang berhubungan dengan *skema* konsep group, termasuk mengkoordinasikannya dengan aksioma. Definisi tentang group diberikan berdasarkan dekomposisi genetik dari konsep group, yaitu suatu himpunan yang bersama-sama dengan suatu operasi biner memenuhi empat aksioma (aksioma group). Pembelajaran konsep group dalam bentuk aktivitas komputer meliputi pengenalan aksioma-aksioma group dan penerapannya pada beberapa pasangan himpunan

dan operasi biner. Fokus pada aktivitas ini adalah bahwa ada pasangan himpunan dan operasi biner yang memenuhi aksioma group dan ada pasangan himpunan dan operasi biner yang tidak memenuhi aksioma group. Beberapa sifat group seperti sifat komutatif juga dieksplorasi.

Agar mahasiswa dapat memahami group sebagai *objek*, misalnya dapat digunakan suatu program ISETL sebagai berikut.

```
name_group := proc (set, operation);
G:= set; o:= operation;
e:= identity (G,o);
i:= | g -> inverse (g,o,g) | ;
writeln "Definisi object group : G, o, e, i.";
end;
```

Dengan menuliskan kode ini, mahasiswa dapat menggunakan notasi group yang umum (seperti menyatakan group dengan G dan unsur identitas dengan e). Gagasan yang ingin dieksplorasi di sini adalah agar mahasiswa dapat memahami bahwa beberapa contoh konkrit tentang group yang sudah diberikan sebelumnya merupakan hal yang khusus dari konsep group. Mahasiswa diminta untuk mencoba beberapa himpunan dan operasi biner sebagai input untuk kode komputer, misalnya Z_{12} dan a_{12} (bilangan

modulo 12 dan penjumlahan bilangan modulo 12), yaitu dengan menulis dan mengeksekusi kode `name_group(Z12,a12)`. Hasil yang akan diperoleh adalah unsur identitasnya $e = 0$, dan invers untuk suatu unsur di G .

2.2.2 Analisis Teoritik Konsep Subgroup

1) Pengetahuan Prasyarat

Misalkan G suatu group, $H \subseteq G$, dan $H \neq \emptyset$ disebut subgroup dari G jika H membentuk group terhadap operasi biner yang didefinisikan di G . Pemahaman mahasiswa terhadap himpunan bagian, himpunan tak kosong, dan fungsi (operasi biner) restriksi sangat diperlukan agar dapat memahami konsep subgroup secara baik. Dengan demikian, konsep tentang subhimpunan, himpunan tak kosong, dan fungsi restriksi perlu diulas kembali secara ringkas sebelum menyampaikan konsep subgroup. Konsep fungsi restriksi sangat perlu ditekankan di sini mengingat suatu subgroup H dari group G dapat juga diartikan bahwa H dan G masing-masing adalah group tetapi $H \subseteq G$.

2) Dekomposisi Genetik Konsep Subgroup

Konsep subgroup dapat dipandang sebagai koordinasi tiga buah *skema*, yaitu: *skema* group, *skema* subhimpunan, dan *skema* fungsi. *Skema* fungsi dan *skema* subhimpunan dikoordinasi untuk memperoleh proses konsep fungsi restriksi pada subhimpunan dari domain fungsi tersebut. Proses ini kemudian dikoordinasikan dengan operasi biner pada *skema* group untuk memperoleh restriksi dari operasi biner pada subhimpunan (operasi biner adalah suatu fungsi). Akhirnya, *skema* aksioma group diterapkan pada subhimpunan dan operasi biner restriksi pada subhimpunan tersebut.

3) Strategi Pembelajaran Konsep Subgroup

Pada akhir pembelajaran tentang konsep group, mahasiswa diminta untuk memikirkan tentang subhimpunan dari group, restriksi dari operasi biner dan konsep group, sedangkan pada bagian akhir dari pembelajaran tentang subgroup, mahasiswa diberikan diskusi singkat tentang konsep subgroup, definisi formal subgroup, dan contoh beberapa subgroup.

Pendekatan utama untuk gagasan subgroup adalah mengganti

himpunan dengan subhimpunannya sedangkan operasi binernya tetap. Gagasan operasi biner pada subhimpunan sebagai fungsi restriksi dan definisi subgroup secara formal perlu diulangi pada akhir pembelajaran mengenai subgroup.

2.2.3 Analisis Teoritik Konsep Koset

1) Pengetahuan Prasyarat

Misalkan G suatu group, H subgroup dari G , dan $a \in G$. Himpunan $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ dan $aH = \{ah \mid h \in H\}$ masing-masing disebut koset kanan dan koset kiri dari subgroup H di G . Perlu diingat bahwa Jika G group komutatif maka $Ha = aH$. Pemahaman mahasiswa terhadap konsep subgroup dan group komutatif sangat diperlukan agar dapat memahami konsep koset secara baik. Dengan demikian, konsep tentang subgroup dan group komutatif perlu diulas kembali secara ringkas sebelum menyampaikan konsep tentang koset.

2) Dekomposisi Genetik Konsep Koset

Aksi dari mengerjakan suatu contoh koset dari suatu subgroup H di group G yang memuat a , dimana group G sudah dikenal dengan baik. Dalam contoh ini formula pembentukan kosetnya diberikan secara eksplisit,

ini tampak dari pola pada unsur-unsur koset tersebut. Interiorisasi *aksi* menjadi *proses* untuk memperoleh bentuk umum koset untuk subgroup H di group G. Selanjutnya *proses* dapat diencapsulasi menjadi *objek* dengan memikirkan suatu tindakan pada koset, misalnya: membandingkan jumlah unsur dari masing-masing koset, membuat irisan diantara koset-koset yang ada, dan membuat gabungan semua koset. Konstruksi *skema* untuk konsep koset dengan cara membuat hubungan antara jumlah unsur subgroup, jumlah koset, dan jumlah unsur pada group.

3) Strategi Pembelajaran Konsep Koset

Strategi pembelajaran untuk konsep koset dimulai dengan aktivitas komputer, yaitu dengan meminta mahasiswa untuk menulis suatu kode komputer yang dapat memperlakukan himpunan $Z_{12} = \{0,1,2,\dots,11\}$ dan $H = \{0,3,6,9\}$ sebagai konstanta, menerima parameter x dan menghitung penjumlahan modulo 12 antara x dengan setiap unsur dari H . Fungsi yang dimaksud ini akan memberikan nama *koset*. Selanjutnya mahasiswa diminta untuk menghitung berapa jumlah koset untuk suatu subgroup dari suatu group (mahasiswa diberikan kebebasan untuk memilih

beberapa contoh) dan diminta untuk memikirkan apakah ada dari koset itu yang merupakan subgroup.

Agar mahasiswa dapat memahami koset sebagai *objek*, mahasiswa diminta untuk menulis kode komputer *PR* yang menerima group dan operasi biner sebagai input dan operasi biner yang diperumum sebagai output. Operasi biner yang diperumum ini akan menerima dua input, yaitu sebuah unsur atau subhimpunan dari group dan membentuk salah satu prodak yang mungkin: prodak dari dua unsur pada group, prodak dari suatu unsur dengan setiap unsur dari suatu subhimpunan dari group, prodak dari suatu unsur dengan setiap unsur dari suatu subgroup. Misalkan groupnya dinyatakan dengan G dan operasi binernya dengan \circ , maka setelah menuliskan dan mengeksekusi kode $oo = PR(G, \circ)$, operasi biner yang diperumum oo dapat dipakai untuk prodak dari unsur, koset kiri, koset kanan, atau prodak dua koset. Pada kesempatan ini juga mahasiswa diharapkan menulis beberapa kode komputer yang dapat dipakai untuk menyelidiki beberapa sifat dari koset. Selanjutnya pembelajaran konsep koset diikuti dengan pemberian: definisi koset secara formal, lemma, contoh, dan pembuktian teorema Lagrange.

2.3 Tingkat-Tingkat Pemahaman dalam Aljabar Abstrak

Teori APOS mempostulatkan bahwa semua konsep-konsep matematika dikonstruksi melalui tahapan konstruksi mental *aksi*, *proses*, *objek*, dan *skema* (Asiala et al., 1997a; Dubinsky & McDonald, 2001). Tingkat pemahaman yang dimiliki seseorang tentang suatu konsep berhubungan erat dengan konstruksi mental yang terjadi dalam fikiran orang tersebut. Dengan demikian, tingkat-tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak dapat dikategorikan ke dalam empat tingkatan pemahaman, yaitu: (1) tingkat pemahaman *aksi*, (2) tingkat pemahaman *proses*, (3) tingkat pemahaman *objek*, dan (4) tingkat pemahaman *skema*.

Khusus dalam pemahaman tentang konsep group, kriteria pengelompokkan tingkat-tingkat pemahaman dalam konsep group yang digunakan pada penelitian ini adalah sebagai berikut: (1) seseorang dikatakan mencapai tingkat pemahaman *aksi* dalam konsep group jika seseorang tersebut dapat menunjukkan bahwa suatu himpunan terhadap suatu operasi biner tertentu membentuk group atau tidak (dalam hal ini himpunan dan operasi binernya sudah dikenal baik oleh mahasiswa, misalnya himpunan dan

operasi biner pada kalkulus dan aljabar linear elementer), (2) seseorang dikatakan mencapai tingkat pemahaman *proses* dalam konsep group jika seseorang tersebut jika seseorang tersebut telah mencapai tingkat pemahaman *aksi* dan dapat menunjukkan bahwa suatu himpunan terhadap suatu operasi biner tertentu membentuk group atau tidak (dalam hal ini himpunan dan operasi binernya abstrak), (3) seseorang dikatakan mencapai tingkat pemahaman *objek* dalam konsep group jika seseorang tersebut telah mencapai tingkat pemahaman *proses* dan dapat membandingkan apakah dua buah group mempunyai struktur yang sama atau tidak (isomorfik), dan (4) seseorang dikatakan mencapai tingkat pemahaman *skema* dalam konsep group jika seseorang tersebut telah mencapai tingkat pemahaman *objek* dan dapat membuat diagram/peta konsep yang menggambarkan keterkaitan definisi, lema, dan teorema dalam konsep group.

3. Metodologi

3.1 Disain Percobaan

Penelitian ini merupakan penelitian eksperimental. Kelas-kelas yang dijadikan kelas eksperimen dan kelas

kontrol dipilih secara acak. Kelas eksperimen diberikan perlakuan berupa pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS, sedangkan kelas kontrol pola pembelajarannya berjalan secara konvensional/biasa. Semua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini diberikan pretes dan postes. Dengan demikian, desain penelitiannya adalah sebagai berikut.

A O X O

A O O

3.2 Subjek penelitian

Subjek pada penelitian ini adalah 89 orang (dua kelas) berasal dari mahasiswa Jurusan Matematika UNAND (Nondik) dan 91 orang (dua kelas) berasal dari Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika UNP (Dik) yang sedang mengambil matakuliah Aljabar Abstrak.

3.3 Prosedur Penelitian

Perkuliahan pada kedua kelompok (eksperimen dan kontrol) menggunakan silabus yang sama, tetapi pengajar dan buku rujukan yang dipakai berbeda, yaitu: (1) kelas kontrol, pengajarnya adalah dosen matakuliah Aljabar abstrak di UNP dan UNAND, dan bahan ajarnya mengacu kepada suatu buku (lihat Herstein,

1975). Buku ini merupakan buku rujukan matakuliah aljabar abstrak (struktur aljabar) di jurusan Matematika UNAND dan Jurusan Pendidikan Matematika UNP, (2) kelas eksperimen, pengajarnya adalah peneliti sendiri dan menggunakan bahan ajar yang telah dirancang khusus berdasarkan paradigma teori APOS.

Pembelajaran untuk kedua kelompok dilakukan selama 10 kali pertemuan dengan 2 kali pertemuan setiap minggu selama 3 x 50 menit setiap pertemuan. Tiga minggu sebelum pembelajaran dimulai, semua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini diberikan Tes Materi Prasyarat, skor tes ini digunakan sebagai dasar untuk mengelompokkan mahasiswa pada kelompok kemampuan awal tinggi, sedang, dan rendah. Mahasiswa yang skor tes materi prasyaratnya 70% atau lebih dikelompokkan pada kemampuan awal tinggi, mahasiswa yang memperoleh skor di atas 30% dan di bawah 70% digolongkan pada kemampuan awal sedang, dan mahasiswa yang memperoleh skor tes materi prasyarat 30% atau kurang digolongkan pada kemampuan awal rendah.

Dua minggu sebelum pembelajaran dimulai, semua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini diberikan pretes. Skor pretes digunakan untuk melihat kesetaraan kelas-kelas yang dilibatkan dalam penelitian. Khusus untuk kelas eksperimen, seminggu sebelum pembelajaran dimulai, diberikan latihan tentang penggunaan *software ISETL* dalam aljabar abstrak. Setelah sepuluh kali pembelajaran, semua mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini diberikan postes. Penelitian ini dilakukan mulai akhir bulan Januari sampai awal bulan April 2006.

3.3 Instrumen

Untuk mengukur tingkat-tingkat pemahaman yang dicapai mahasiswa dalam konsep group maka digunakan

tes sebagai berikut.

1) Buktikan bahwa $G =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, c, d \in \mathbb{R} \text{ dan } ad \neq 0 \right\}$$

merupakan group terhadap operasi perkalian matriks.

2) Misalkan (G, \cdot) suatu group komutatif dan $t \in G$. Definisikan operasi biner baru Δ di G sebagai $x \Delta y = x \cdot y \cdot t^{-1}$ untuk setiap $x, y \in G$ (t^{-1} adalah invers dari t). Buktikan bahwa G merupakan group terhadap operasi biner Δ .

3) (G, Δ) dan (G', γ) dengan $G = \{0, 1, 2\}$ dan $G' = \{a, b, c\}$ masing-masing adalah grup. Operasi biner di G dan G' dinyatakan dalam tabel berikut.

?	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

?	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Periksa apakah kedua grup itu isomorfik ?

- 4) Buatlah suatu diagram/skema yang menggambarkan semua yang saudara ketahui tentang konsep group.

Setiap item tes diberi skor berdasarkan model penskoran yang diadopsi dari Malone et al. (dalam Hart, 1994), yaitu skornya antara 0 sampai 4 (0,1,2,3, atau 4) sesuai dengan tingkat kebenarannya. Instrumen ini telah divalidasi oleh Dr. Puji Astuti dan Dr. Edy Tri Baskoro dari ITB dan Dr. Rizky Rosjanuardi dan Dr. Siti Fatimah dari UPI pada bulan Juni 2005.

3.4 Teknik Analisis Data

Untuk mengetahui tingkat-tingkat pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak (konsep group), maka analisis dilakukan terhadap jawaban mahasiswa dalam postes. Tingkat-tingkat pemahaman yang dicapai mahasiswa ditentukan oleh tingkat kebenaran jawaban dalam postes, yaitu dengan kriteria sebagai berikut.

Tingkat pemahaman *aksi*: mahasiswa dapat menjawab dengan benar (skor 3 atau 4) soal no. 1 tetapi soal no. 2, no. 3, dan no. 4 salah.

Tingkat pemahaman *proses*: mahasiswa dapat menjawab dengan benar (skor 3 atau 4) soal no. 1 dan no. 2 tetapi no. 3 dan no. 4 salah.

Tingkat pemahaman *objek*: mahasiswa dapat menjawab dengan benar (skor 3 atau 4) soal no. 1, no. 2, dan no. 3 tetapi no 4 salah.

Tingkat pemahaman *skema*: mahasiswa dapat menjawab dengan benar (skor 3 atau 4) soal no. 1, no. 2, no. 3, dan no 4.

Dan lain-lain (Dll.): mahasiswa yang tidak dapat dikelompokkan pada tingkat pemahaman *aksi*, *proses*, *objek*, dan *skema*.

Banyaknya mahasiswa yang tergolong pada masing-masing tingkat-tingkat pemahaman dinyatakan dalam prosentase. Kajian tentang tingkat-tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak (teori group) didasarkan kepada besarnya prosentase tersebut.

4. Hasil dan Pembahasan

Data yang berupa jumlah mahasiswa dan prosentasenya yang mencapai tingkat pemahaman *aksi*, *proses*, *objek*, dan *skema* yang diperoleh dari subjek sampel dikelompokkan berdasarkan kelompok pembelajaran, kelompok jurusan, dan kelompok kemampuan awal. Data tersebut disajikan pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Ada beberapa hal yang berkenaan dengan tingkat-tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak

yang dapat diungkap dari Tabel 1 dan Tabel 2, yaitu:

- 1) Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mencapai tingkat-tingkat pemahaman lebih baik (36,6% mencapai tingkat pemahaman setingkat *skema*) jika dibandingkan dengan mahasiswa yang pembelajarannya secara biasa (hanya 31,1% yang mencapai pemahaman setingkat *skema*).
- 2) Mahasiswa Nondik mencapai tingkat-tingkat pemahaman relatif lebih baik (33 dari 89 mahasiswa mencapai pemahaman setingkat *skema*) jika dibandingkan dengan mahasiswa Dik (hanya 28 dari 91 mahasiswa yang mencapai pemahaman setingkat *skema*).
- 3) Makin tinggi kemampuan awal maka semakin baik tingkat pemahaman yang dicapai mahasiswa.

Tabel 1: Prosentase Subjek menurut Tingkat Pemahaman dalam Konsep Group yang Pembelajarannya berdasarkan Teori APOS

Tingkat Pemahaman	Nondik (44)			Dik (46)			Total (90)
	T (13)	S (22)	R (9)	T (10)	S (25)	R (11)	
Aksi	0	0	6	0	5	6	17
	0%	0%	66,6%	0%	20%	54,5%	18,8%
Proses	0	7	0	0	6	0	13
	0%	31,8%	0%	0%	24%	0%	14,4%
Objek	2	8	0	2	3	0	15
	15,3%	36,3%	0%	20%	20%	0%	16,6%
Skema	11	7	0	8	7	0	33
	84,6%	31,8%	0%	80%	28%	0%	36,6%
Lainnya	0	0	3	0	4	5	12
	0%	0%	33,3%	0%	16%	45,4%	13,3%

T: tinggi, S: sedang, dan R: rendah

Tabel 2: Jumlah dan Prosentase Subjek menurut Tingkat Pemahaman dalam Konsep Group yang Pembelajarannya secara Biasa

Tingkat Pemahaman	Nondik (45)			Dik (45)			Total (90)
	T (11)	S (25)	R (9)	T (11)	S (24)	R (10)	
Aksi	0	12	2	0	12	3	29
	0%	48%	22,2%	0%	50%	30%	32,2%
Proses	0	2	0	0	2	0	4
	0%	8%	0%	0%	8,3%	0%	4,4%
Objek	2	5	0	3	5	0	15
	18,1%	20%	0%	27,2%	20,8%	0%	16,6%
Skema	9	6	0	8	5	0	28
	81,8%	24%	0%	72,7%	20,8%	0%	31,1%
Dll.	0	0	7	0	0	7	14
	0%	0%	77,7%	0%	0%	70%	15,5%

T: tinggi, S: sedang, dan R: rendah

Penelitian ini menunjukkan bahwa pembelajaran berdasarkan teori APOS dapat mengembangkan tingkat-tingkat pemahaman mahasiswa dalam aljabar abstrak. Belajar aljabar abstrak meliputi belajar konsep, proses, bahasa, notasi dan hubungan antar konsep, proses, bahasa, dan notasi. Interaksi antara

anggota kelompok, interaksi antar kelompok, dan interaksi dosen dengan setiap kelompok telah memungkinkan apa yang secara samar-samar telah diketahui mahasiswa menjadi lebih jelas dalam pikiran mahasiswa. Disamping itu, tahapan konstruksi mental aksi, proses, objek, dan skema yang

merupakan acuan penyusunan bahan ajar telah memungkinkan mahasiswa dapat memahami konsep-konsep yang abstrak menjadi lebih konkrit yaitu melalui contoh-contoh yang dapat mereka amati sendiri pada kegiatan di laboratorium komputer.

Pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS yang dimaksudkan untuk mengembangkan kualitas pemahaman tercermin dari sajian bahan ajar, intervensi dosen, interaksi antar komunitas kelas yang multi arah, dan penggunaan siklus pembelajaran ACE (aktivitas laboratorium, diskusi kelas, dan latihan). Penggunaan siklus pembelajaran ACE dimaksudkan agar mahasiswa terbantu dalam melakukan konstruksi-konstruksi mental yang diperlukan untuk memahami ide-ide matematika. Melalui aktivitas laboratorium, mahasiswa diharapkan dapat memandang konsep-konsep abstrak dalam tataran yang lebih konkrit dan dapat memperoleh beberapa fakta tentang konsep tersebut. Selanjutnya, dengan berbekal pengalaman dari aktivitas laboratorium mahasiswa diajak untuk mendiskusikan konsep-konsep tersebut untuk memperoleh definisi dan konjektur. Melalui intervensi tidak langsung, mahasiswa diajak untuk membuktikan konjektur yang telah mereka buat, sehingga

diperoleh lema atau teorema yang berkaitan dengan konsep tersebut. Untuk memperkokoh konsep-konsep, lema, dan teorema yang telah dimiliki mahasiswa maka mahasiswa diajak untuk menerapkan konsep-konsep, lema, dan teorema tersebut pada beberapa permasalahan dalam aljabar abstrak.

5. Simpulan dan Saran

5.1 Simpulan

Ditinjau dari faktor pembelajaran (APOS dan Biasa), faktor kelompok jurusan (Nondik dan Dik), kemampuan awal (tinggi, sedang, dan rendah), dan tingkat pemahaman dalam aljabar abstrak diperoleh kesimpulan bahwa: (1) Mahasiswa yang memperoleh pembelajaran aljabar abstrak berdasarkan teori APOS mempunyai tingkat pemahaman lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara biasa, (2) Mahasiswa jurusan matematika (Nondik) mencapai tingkat pemahaman lebih baik jika dibandingkan dengan mahasiswa jurusan pendidikan matematika (Dik), dan (3) Makin tinggi kemampuan awal mahasiswa makin baik pemahanan yang dimiliki oleh mahasiswa tersebut.

5.2 Saran

Pendekatan pembelajaran berdasarkan teori APOS sangat potensial untuk diterapkan dalam pembelajaran matematika pada tingkat universitas, khususnya dalam pembelajaran aljabar abstrak, baik pada jurusan matematika maupun pada jurusan pendidikan matematika. Oleh karena adanya kaitan antara kemampuan awal dengan tingkat pemahaman aljabar abstrak mahasiswa, maka dalam memilih cara pembuktian atau cara menyampaikan konsep perlu mempertimbangkan pengetahuan prasyarat untuk perkuliahan aljabar abstrak yang dimiliki mahasiswa. Agar kualitas pemahaman mahasiswa jurusan pendidikan matematika (Dik) relatif sama dengan kualitas pemahaman jurusan matematika (Nondik) dalam aljabar abstrak maka mata kuliah pilihan untuk Dik harus lebih ditekankan pada matakuliah-matakuliah matematika murni, terutama matakuliah-matakuliah yang dapat mendukung dan memperkokoh penguasaan terhadap materi prasyarat mata kuliah aljabar abstrak. Seyogyanya implementasi pendekatan pembelajaran berdasarkan teori APOS dapat berjalan sebagaimana yang diharapkan maka ada beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu: (1) pastikan bahwa permasalahan yang

dipakai untuk mengawali pembelajaran (baik untuk memperkenalkan konsep maupun untuk memperkenalkan sifat-sifat tertentu) bervariasi dan sesuai dengan pengetahuan yang telah diperoleh mahasiswa (agar mahasiswa terbantu dalam melakukan konstruksi mental), (2) pastikan bahwa pembelajaran telah mengacu kepada tahapan-tahapan dalam memperkenalkan konsep dan sifat-sifat dalam aljabar abstrak, (3) pastikan bahwa intervensi dosen dalam pembelajaran proporsional dengan kebutuhan mahasiswa, dengan kata lain bahwa intervensi dosen semata-mata dimaksudkan untuk mengembangkan Zone of Proximal Development (ZPD) yang dimiliki mahasiswa, dan (4) pastikan bahwa mahasiswa telah memperoleh latihan yang cukup dalam rangka memperkokoh konsep-konsep dan lema/teorema yang mereka telah pelajari. Dalam pendekatan teori APOS, dosen berperan sebagai fasilitator (intervensi tidak langsung), peran ini tidaklah mudah. Dengan demikian dosen yang mengasuh matakuliah aljabar abstrak haruslah dosen yang berpengalaman dalam mengajar dan mempunyai kompetensi yang memadai. Ini dimaksudkan agar dosen dapat berimprovisasi dalam

menanggapi berbagai pertanyaan dari mahasiswa atau dalam memberi *hint* agar tepat sasaran. Keberhasilan suatu pembelajaran tidak hanya ditentukan oleh hasil belajar tetapi juga oleh keaktifan mahasiswa dalam pembelajaran, karena itu dalam penerapan pendekatan teori APOS di lapangan alat evaluasi yang digunakan harus lebih luas (tidak cukup hanya melalui tes tertulis). Alat evaluasi harus mampu mengevaluasi

seluruh kegiatan mahasiswa selama pembelajaran, misalnya menilai mahasiswa yang mengajukan pertanyaan dan yang merespon pendapat teman atau dosen yang relevan dengan pembelajaran dan menilai mahasiswa yang menemukan sesuatu dalam pembelajaran (misalnya menemukan lema atau dapat menyelesaikan suatu masalah dalam aljabar abstrak).

Pustaka Acuan

- Arnawa, I.M. 2005. Meningkatkan Pemahaman Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak melalui Pembelajaran berdasarkan teori APOS. *Jurnal Pendidikan dan kebudayaan*. 11(056), 693-710.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. 1997a. A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Dalam E. Dubinsky et al. (ed.). *Reading in: Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S., & Oktac, A. 1997b. Student Understanding of Coset, Normality, and Quotient Groups. *Journal of Mathematical Behavior*. 16 (3), 241-309.
- Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., & Thomas, K. 1997. Learning Binary Operation, Groups, and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*. 16 (3), 187-239.
- Carlson, D. 2003. The Teaching and Learning of Tertiary Algebra. Makalah pada Seminar Nasional Aljabar dan Pengajaran Aljabar di Perguruan Tinggi. Jogjakarta.
- Dubinsky, E. Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. 1994. On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 267-305.

- Dubinsky, E. & McDonald, M. 2001. APOS: A Constructivism Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. Dalam D. Holton (ed.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Findel, B.R. 2001. Learning and Understanding in Abstract Algebra. Disertasi. New Hampshire: Tidak diterbitkan.
- Hart, E. W. 1994. A Conceptual Analysis of The Proof-Writing performance of Expert and Novice Students in Elementary group Theory. Dalam J. J. Kaput & Ed Dubinsky (ed.). *Research Issues in Undergraduate Mathematics learning*. Washington: American Mathematical Society.
- Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.
- Krutetskii, V.A. 1976. *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Leron, U. & Dubinsky, E. 1995. An Abstract Algebra Story. *American Mathematical Monthly*, 102 (3), 227-242.
- Mustafa, D. 2001. *Memotivasi Mahasiswa untuk Kuliah dan Belajar Sepanjang Hayat*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Ruseffendi, E.T. 1991. *Pengantar kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.